4.2 ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ – ΑΝΙΣΩΣΗ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

11ο ΜΑΘΗΜΑ

- Η παράσταση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ λέγεται **τριώνυμο 2ου βαθμού** ή, πιο απλά, **τριώνυμο**.
- Η διακρίνουσα Δ της αντίστοιχης εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ λέγεται και **διακρίνουσα του τριωνύμου**.
- Όταν η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει πραγματικές ρίζες, τότε αυτές θα ονομάζονται και **ρίζες του τριωνύμου**.

Παραγοντοποίηση Τριωνύμου

Στο τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ βρίσκουμε τη διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma$ και διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) Αν $\Delta>0$, τότε το τριώνυμο έχει **δύο πραγματικές και άνισες ρίζες**, τις $x_1=\dfrac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $x_2=\dfrac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ οπότε παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$$

β) Αν $\Delta=0$, τότε το τριώνυμο έχει **μία διπλή πραγματική ρίζα**, την $x_0=\dfrac{-\beta}{2\alpha}$ και παραγοντοποιείται ως εξής: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_0)^2$

(*Πιο εύκολα, το παραγοντοποιούμε ως ανάπτυγμα τετραγώνου.*)

γ) Αν $\Delta<0$, τότε το τριώνυμο **δεν παραγοντοποιείται** στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, αλλά μπορεί να γραφεί ως:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right].$$

⇨ Πρόσημο των τιμών του τριωνύμου

Για το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \ \alpha\neq 0$, ισχύει ότι είναι:

✦ **Ετερόσημο του α,** μόνο όταν $\Delta>0$ για τις τιμές του x που βρίσκονται μεταξύ των ριζών.

✦ **Μηδέν,** όταν η τιμή του x είναι κάποια από τις ρίζες του τριωνύμου.

✦ **Ομόσημο του α,** σε κάθε άλλη περίπτωση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Παράδειγμα 4.2.1

Να παραγοντοποιηθούν τα τριώνυμα:

α) $2x^2-3x-2$ **β)** $25x^2-10x+1$ **γ)** $3x^2-x+5$

Λύση

α) Έχω το τριώνυμο $2x^2-3x-2$ με $\Delta=25>0$. Βρίσκω τις ρίζες του.

Δηλαδή $$2x^2-3x-2=0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{25}}{2\cdot 2}=\frac{3\pm 5}{4}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{8}{4}=2\\ x_2=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

Άρα παραγοντοποιείται ως εξής: $2x^2-3x-2=2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x-2)(2x+1)$

β) Έχω το τριώνυμο $25x^2-10x+1$ με $\Delta=0$.

Η ρίζα του είναι $x_o=\frac{10}{2\cdot 25}=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}$.

Άρα παραγοντοποιείται ως εξής: $25x^2-10x+1=25\left(x-\frac{1}{5}\right)^2=$

$$=25\left(\frac{5x}{5}-\frac{1}{5}\right)^2=25\left(\frac{5x-1}{5}\right)^2=25\frac{(5x-1)^2}{25}=(5x-1)^2$$

γ) Έχω το τριώνυμο $3x^2-x+5$ με $\Delta=-59<0$, άρα το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται.

Παράδειγμα 4.2.2 (Σχολικό, Σελίδα 113, Άσκηση Β2)

Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2+(2\beta-\alpha)x-\alpha\beta$.

Λύση

$$\Delta=(2\beta-\alpha)^2-4\cdot 2(-\alpha\beta)=4\beta^2-4\alpha\beta+\alpha^2+8\alpha\beta=4\beta^2+4\alpha\beta+\alpha^2=(2\beta+\alpha)^2$$

$$x_{1,2}=\frac{-(2\beta-\alpha)\pm\sqrt{(2\beta+\alpha)^2}}{4}=\frac{-2\beta+\alpha\pm(2\beta+\alpha)}{4}$$

$$x_1=\frac{-2\beta+\alpha+2\beta+\alpha}{4}=\frac{2\alpha}{4}=\frac{\alpha}{2}$$

$$x_2=\frac{-2\beta+\alpha-2\beta-\alpha}{4}=\frac{-4\beta}{4}=-\beta$$

$$2x^2+(2\beta-\alpha)x-\alpha\beta=2\cdot(x-x_1)(x-x_2)=2\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\left[x-(-\beta)\right]=(2x-\alpha)(x+\beta)$$

Παράδειγμα 4.2.3

Να βρεθούν τα πρόσημα των τριωνύμων:

α) $2x^2-3x-2$ **β)** $-2x^2+3x+2$ **γ)** $25x^2-10x+1$

δ) $-25x^2+10x-1$ **ε)** $3x^2-x+5$ **στ)** $-3x^2+x-5$

Λύση

ΜΕΘΟΔΟΣ

1. Βρίσκουμε τις ρίζες του τριωνύμου.

2. Κάνουμε πίνακα προσήμου τοποθετώντας στις άκρες το $-\infty$ και το $+\infty$ και ανάμεσά τους τις ρίζες.

3. Ξεκινάμε από τα αριστερά και στο πρώτο διάστημα βάζουμε το πρόσημο του α, συνεχίζουμε προς τα δεξιά με τα πρόσημα να πηγαίνουν εναλλάξ, **εκτός** αν η ρίζα είναι διπλή!!

α) Έχω $f(x)=2x^2-3x-2=(x-2)(2x+1)$.

Ο πίνακας προσήμου είναι:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

β) Έχω $f(x)=-2x^2+3x+2=-(x-2)(2x+1)$

Ο πίνακας προσήμου είναι:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

γ) Έχω $f(x)=25x^2-10x+1=(5x-1)^2$.

Ο πίνακας προσήμου είναι:

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

δ) Έχω $f(x)=-25x^2+10x-1=-(5x-1)^2$

Ο πίνακας προσήμου είναι:

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

ε) Έχω $f(x)=3x^2-x+5$ με $\Delta=-59<0$, άρα το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες. Ο πίνακας προσήμου είναι:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

στ) Έχω $f(x)=-3x^2+x-5$ με $\Delta=-59<0$, άρα το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Ο πίνακας προσήμου είναι:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$-$

Παράδειγμα 4.2.4

Να λυθούν οι ανισώσεις χρησιμοποιώντας τους πίνακες προσήμου που βρήκατε στο προηγούμενο παράδειγμα:

α) $2x^2-3x-2<0$ **β)** $-2x^2+3x+2\le 0$ **γ)** $25x^2-10x+1>0$

δ) $-25x^2+10x-1\ge 0$ **ε)** $3x^2-x+5\ge 0$ **στ)** $-3x^2+x-5\ge 0$

Λύση

ΜΕΘΟΔΟΣ

1. Μεταφέρουμε τα πάντα στο 1ο μέλος ώστε το 2ο να είναι μηδέν.

2. Κάνουμε πράξεις και καταλήγουμε σε τριώνυμο.

3. Βρίσκω το πρόσημο του τριωνύμου του 1ου μέλους.

4. Η λύση της ανίσωσης είναι τα διαστήματα που συμφωνούν με την φορά της ανίσωσης!!

α) Θέλουμε $2x^2-3x-2<0$, ο πίνακας προσήμου είναι:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

, άρα $x\in\left(-\frac{1}{2},2\right)$

β) Θέλουμε $-2x^2+3x+2\le 0$, ο πίνακας προσήμου είναι:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	

, άρα $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[2,+\infty\right)$.

γ) Θέλουμε $25x^2-10x+1>0$, ο πίνακας προσήμου είναι:

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

, άρα $x\in\left(-\infty,\frac{1}{5}\right)\cup\left(\frac{1}{5},+\infty\right)$.

δ) Θέλουμε $-25x^2+10x-1\geq 0$, ο πίνακας προσήμου είναι:

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

, άρα $x=\frac{1}{5}$.

ε) Θέλουμε $3x^2-x+5\geq 0$, ο πίνακας προσήμου είναι:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

, άρα επαληθεύεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς

Οπότε $x\in\mathbb{R}$.

στ) Θέλουμε $-3x^2+x-5\geq 0$, ο πίνακας προσήμου είναι:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	

, άρα δεν υπάρχει x που να επαληθεύει την ανίσωση.

Οπότε η ανίσωση είναι αδύνατη.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ - "Διερεύνηση Δευτεροβάθμιας Ανίσωσης"

Όταν σε κάποια άσκηση μας ζητάνε διερεύνηση δευτεροβάθμιας ανίσωσης, ώστε το τριώνυμο

- Να διατηρεί **σταθερό πρόσημο** για κάθε $x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta<0$
- Να είναι **θετικό** για κάθε $x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta<0$ και $\alpha>0$.
- Να είναι **αρνητικό** για κάθε $x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta<0$ και $\alpha<0$.

Εναλλακτικά οι συνθήκες ώστε να ισχύουν οι παρακάτω ανισώσεις για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma>0 \Leftrightarrow \Delta<0 \text{ και } \alpha>0$$

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma\geq 0 \Leftrightarrow \Delta\leq 0 \text{ και } \alpha>0$$

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma<0 \Leftrightarrow \Delta<0 \text{ και } \alpha<0$$

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma\leq 0 \Leftrightarrow \Delta\leq 0 \text{ και } \alpha<0$$

Παράδειγμα 4.2.5

Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ το τριώνυμο

$f(x)=(\lambda-2)x^2+2(2\lambda-3)x+5\lambda-6,\ \lambda\neq 2$:

α) διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) είναι θετικό για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) είναι αρνητικό για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

ΜΕΘΟΔΟΣ

Όταν σε κάποια άσκηση μας ζητάνε να βρούμε την τιμή μιας παραμέτρου (λ), δηλαδή να κάνουμε διερεύνηση της δευτεροβάθμιας ανίσωσης, τότε:

1. Εξετάζουμε τι πρόσημο πρέπει να έχει η διακρίνουσα, ώστε η ανίσωση να αληθεύει για κάθε x.

2. Λύνουμε την ανίσωση που προκύπτει από το πρόσημο της διακρίνουσας.

3. Για το τριώνυμο έχουμε υπόψη μας τα παρακάτω:

Διατηρεί **σταθερό πρόσημο** για κάθε $x\in\mathbb{R}$ όταν $\Delta<0$ ή αλλιώς είναι **θετικό** για κάθε $x\in\mathbb{R}$ όταν $\Delta<0$ και $\alpha>0$ και είναι **αρνητικό** για κάθε $x\in\mathbb{R}$ όταν $\Delta<0$ και $\alpha<0$.

α) Έχω $f(x)=(\lambda-2)x^2+2(2\lambda-3)x+5\lambda-6,\ \lambda\neq 2$

Πρέπει $\Delta<0$, άρα

$$\Delta=\left[2(2\lambda-3)\right]^2-4(\lambda-2)(5\lambda-6)=4(4\lambda^2-12\lambda+9)-4(5\lambda^2-16\lambda+12)$$

$$=16\lambda^2-48\lambda+36-20\lambda^2+64\lambda-48=-4\lambda^2+16\lambda-12$$

$$=-4(\lambda^2-4\lambda+3)=-4(\lambda-1)(\lambda-3)<0$$

Οπότε αρκεί $(\lambda-1)(\lambda-3)>0$, δηλαδή πρέπει να κάνουμε πίνακα προσήμου για την διακρίνουσα

λ	$-\infty$	1		3	$+\infty$
Δ	+	0	−	0	+

άρα $\lambda\in(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$ και επιπλέον $2\notin(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

β) Έχω $f(x)=(\lambda-2)x^2+2(2\lambda-3)x+5\lambda-6,\ \lambda\neq 2$

Πρέπει $\Delta<0$ και $\alpha>0$.

Άρα $\Delta<0\Leftrightarrow(\lambda-1)(\lambda-3)>0\Leftrightarrow\lambda\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

Και ταυτόχρονα πρέπει $\alpha>0\Leftrightarrow(\lambda-2)>0\Leftrightarrow\lambda>2$.

Τελικά $\lambda\in(3,+\infty)$.

γ) Έχω $f(x)=(\lambda-2)x^2+2(2\lambda-3)x+5\lambda-6,\ \lambda\neq 2$

Πρέπει $\Delta<0$ και $\alpha<0$.

Άρα $\Delta<0\Leftrightarrow(\lambda-1)(\lambda-3)>0\Leftrightarrow\lambda\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

Και ταυτόχρονα πρέπει $\alpha<0\Leftrightarrow(\lambda-2)<0\Leftrightarrow\lambda<2$.

Τελικά $\lambda\in(-\infty,1)$.

Παράδειγμα 4.2.6

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x^2+(2\lambda+3)x+\lambda-2=0,\ \lambda\neq-2$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta=12\lambda+25$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες και άνισες.

γ) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του $\lambda\in\mathbb{R},\ \lambda\neq-2$ το άθροισμα $S=x_1+x_2$ και το γινόμενο $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών $x_1,\ x_2$ της παραπάνω εξίσωσης.

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ ώστε να ισχύει η σχέση $(x_1+x_2-1)^2+(x_1\cdot x_2+3)^2=0$ για τις ρίζες $x_1,\ x_2$ της παραπάνω εξίσωσης.

<u>Λύση</u>

α) Έχω $(\lambda+2)x^2+(2\lambda+3)x+\lambda-2=0,\ \lambda\neq-2$, όπου:

$$\Delta=(2\lambda+3)^2-4(\lambda+2)(\lambda-2)=4\lambda^2+12\lambda+9-4(\lambda^2-4)=$$
$$=4\lambda^2+12\lambda+9-4\lambda^2+16=12\lambda+25$$

Άρα $\Delta=12\lambda+25$.

β) Πρέπει $\Delta>0$.

Άρα $\Delta=12\lambda+25>0\Leftrightarrow 12\lambda>-25\Leftrightarrow\lambda>-\dfrac{25}{12}\Leftrightarrow\lambda\in\left(-\dfrac{25}{12},+\infty\right)$

γ) Είναι: $S=x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}=-\dfrac{2\lambda+3}{\lambda+2}$ και $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{\lambda-2}{\lambda+2}$

δ) Θέλω να βρω το λ ώστε να ισχύει η σχέση

$$(x_1+x_2-1)^2+(x_1\cdot x_2+3)^2=0\Leftrightarrow(S-1)^2+(P+3)^2=0$$

Έχω άθροισμα μη αρνητικών αριθμών ίσο με το μηδέν, άρα κάθε όρος πρέπει να είναι ίσος με το μηδέν. Οπότε πρέπει: $S=1$ και $P=-3$

$$\begin{cases}-\dfrac{2\lambda+3}{\lambda+2}=1\\ \dfrac{\lambda-2}{\lambda+2}=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\lambda+3=-(\lambda+2)\\ \lambda-2=-3(\lambda+2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\lambda+3=-\lambda-2\\ \lambda-2=-3\lambda-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\lambda=-5\\ 4\lambda=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=-\dfrac{5}{3}\\ \lambda=-1\end{cases},$$

κάτι το οποίο είναι αδύνατον να συμβαίνει ταυτόχρονα.

Παράδειγμα 4.2.7

Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η ανίσωση $(\lambda - 1)x^2 - \lambda x + \lambda > 0,\ \lambda \neq 1$ να αληθεύει, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Πρέπει $\begin{cases} \lambda - 1 > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ οπότε,

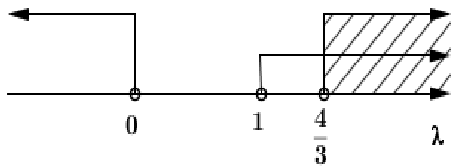
λ	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lambda - 1 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 1$, (1) και

$\Delta < 0 \Leftrightarrow (-\lambda)^2 - 4(\lambda - 1) \cdot \lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda^2 + 4\lambda < 0$

$\Leftrightarrow -3\lambda^2 + 4\lambda < 0 \Leftrightarrow 3\lambda^2 - 4\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda(3\lambda - 4) > 0$

$\Leftrightarrow \lambda < 0$ ή $\lambda > \frac{4}{3}$, (2)



Από (1) και (2) βρίσκουμε τελικά ότι : $\lambda > \frac{4}{3}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Α. Να χαρακτηριστούν με Σωστό ή Λάθος οι παρακάτω προτάσεις:

1	Αν $\alpha>0$ και $\Delta<0$ τότε η ανίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0$ αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.	Σ □ Λ □
2	Αν η ανίσωση $-x^2+2x+\gamma\geq 0$ είναι αδύνατη, τότε $\gamma<-1$.	Σ □ Λ □
3	Αν η ανίσωση $-2x^2+3\lambda x-\lambda^2\leq 0$ αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε $\lambda=0$.	Σ □ Λ □
4	Η ανίσωση $\lambda^2x^2+4\lambda x+5\leq 0$, με $\lambda\neq 0$, αληθεύει για όλα τα $x\in\mathbb{R}$.	Σ □ Λ □
5	Ένα τριώνυμο με $\Delta<0$, παίρνει μόνο αρνητικές τιμές.	Σ □ Λ □
6	Το τριώνυμο x^2-3x+5 είναι αρνητικό για κάθε $x\in\mathbb{R}$.	Σ □ Λ □
7	Αν $\alpha>0$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x\in\mathbb{R}$.	Σ □ Λ □
8	Η ανίσωση $x^2-7x+10<0$ έχει λύσεις $x<2$ ή $x>5$.	Σ □ Λ □
9	Η ανίσωση $x^2+\lambda x+\lambda^2>0$, με $\lambda\neq 0$, αληθεύει για όλα τα $x\in\mathbb{R}$.	Σ □ Λ □
10	Οι ανισώσεις $x^2(x-1)\geq 0$ και $x-1\geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.	Σ □ Λ □
11	Οι ανισώσεις $\dfrac{2x-1}{x+1}>1$ και $2x-1>x+1$ έχουν τις ίδιες λύσεις	Σ □ Λ □
12	Οι ανισώσεις $\dfrac{x-1}{(x-2)^2}\geq 0$ και $(x-1)(x-2)^2\geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.	Σ □ Λ □

Β. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

α)	Αν η ανίσωση $-x^2+2x+\gamma\geq 0$ είναι αδύνατη τότε:	
i. $\gamma>-1$		**ii.** $\gamma=-1$
iii. $\gamma<-1$		**iv.** $\gamma\geq -1$.

β)	Αν η ανίσωση $x^2+2x+\gamma>0$ αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε:	
i. $\gamma<1$		**ii.** $\gamma=1$
iii. $\gamma>1$		**iv.** $\gamma\leq 1$

γ)	Αν η ανίσωση $-2x^2+3\lambda x-\lambda^2\leq 0$ αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε:	
i. $\lambda>0$		**ii.** $\lambda<0$
iii. $\lambda=1$		**iv.** $\lambda=0$

δ)	Η εξίσωση $\lvert x-1\rvert+\lvert x-5\rvert=4$ αληθεύει αν και μόνο αν:	
i. $x<1$		**ii.** $x>5$
iii. $1\leq x\leq 5$		**iv.** $1<x<5$

ε)	Η εξίσωση $\lvert x-1\rvert=x-1$:	
i. Είναι αδύνατη		**ii.** Έχει μοναδική λύση τη $x=1$
iii. Έχει άπειρες λύσεις		**iv.** Είναι ταυτότητα.

Γ. Να εντοπίσετε το λάθος στον παρακάτω συλλογισμό:

Η ανίσωση $(2x-6)(x-1)>0$ γράφεται ισοδύναμα:

$(2x-6)(x-1)>0\Leftrightarrow 2x-6>0$ και $x-1>0\Leftrightarrow x>3$ και $x>1\Leftrightarrow x>3$.

Όμως ο αριθμός 0, αν και είναι μικρότερος του 3, <u>επαληθεύει</u> τη δοθείσα ανίσωση.

Δ. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τα τριώνυμα της Α′ ομάδας με την ισοδύναμη μορφή του από τη Β′ ομάδα.

Α΄ ΟΜΑΔΑ	Β΄ ΟΜΑΔΑ
1. $-2x^2+6x-4$	**α.** $(x-1)(x-2)$
2. x^2-3x+2	**β.** $-(x-1)(x-2)$
3. $-x^2+3x-2$	**γ.** $2(x-1)(x-2)$
4. $2x^2-6x+4$	**δ.** $-2(x-1)(x-2)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΞΑΣΚΗΣΗΣ – ΕΜΠΕΔΩΣΗΣ

Άσκηση 4.2.8

Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω τριωνύμων:

α) $2x^2+5x+2$ **β)** $-6x^2+x+1$ **γ)** $3x^2+x+11$

δ) $4x^2-28x+49$ **ε)** $-4x^2-2x-7$ **στ)** $-x^2+9x-20$

Άσκηση 4.2.9

Να λυθούν οι ανισότητες:

α) $2x^2+3x-5>0$ **β)** $4x^2-20x+25\geq 0$ **γ)** $2x^2-x+4\leq 0$

δ) $x^2+3x\leq 4$ **ε)** $-9x^2+12x-4>0$ **στ)** $9-x^2<0$

ζ) $-2x^2+5x-3\geq 0$ **η)** $x^2-5x+80>0$ **θ)** $x^4-16\leq 0$

Άσκηση 4.2.10 (Σχολικό, Σελίδα 113, Άσκηση 11)

Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις $x^2-6x+5<0$ και $x^2-5x+6>0$.

Άσκηση 4.2.11

Να βρείτε τις κοινές λύσεις των παρακάτω ανισώσεων και να τις παραστήσετε στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

α) $x^2-5x+4>0$ και $x^2-7x\le 0$

β) $x<3$ και $x^2+3x-4<0$

γ) $x<x^2<1$

Άσκηση 4.2.12

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\sqrt{2}(\lambda-1)x+2(\lambda^2-1)=0$.

Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση να έχει μία πραγματική ρίζα διπλή.

Άσκηση 4.2.13

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2(\lambda-3)x+2(\lambda^2-6\lambda+9)=0$ $(\lambda\in\mathbb{R})$.

Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση να μην έχει πραγματικές ρίζες.

Άσκηση 4.2.14

Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=(\mu-2)x^2-2(\mu+3)x+2\mu-18$.

Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$:

α) το τριώνυμο έχει δύο ρίζες θετικές.

β) το τριώνυμο έχει δύο ρίζες αρνητικές.

Άσκηση 4.2.15

Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=(\mu-3)x^2-2(3\mu-4)x+7\mu-6,\ \mu\ne 3$.

Για ποιες τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$:

α) το τριώνυμο έχει δύο ρίζες αντίθετες.

β) το τριώνυμο έχει δύο ρίζες αντίστροφες.

γ) το τριώνυμο έχει δύο ρίζες θετικές.

δ) το τριώνυμο έχει δύο ρίζες αρνητικές.

ε) το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ομόσημες.

στ) το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ετερόσημες.

Άσκηση 4.2.16

Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=\lambda x^2-2(\lambda-2)x+2\lambda-7,\ \lambda\neq 0$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$:

α) το τριώνυμο έχει δύο ρίζες αντίθετες.

β) το τριώνυμο έχει δύο ρίζες αντίστροφες.

Άσκηση 4.2.17

Για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση $(\lambda+4)x^2-(\lambda-3)x-\dfrac{\lambda-3}{4}=0,\ \ \lambda\neq -4$:

α) Έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Έχει δύο ρίζες πραγματικές και ίσες.

γ) Δεν έχει ρίζες πραγματικές.

Άσκηση 4.2.18

Για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$:

α) το τριώνυμο $2x^2-2x+5\lambda$ παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x\in\mathbb{R}$;

β) το τριώνυμο $(\lambda-1)x^2-2\lambda x+(\lambda-2)$ παίρνει αρνητικές τιμές για κάθε $x\in\mathbb{R}$;

Άσκηση 4.2.19 (Σχολικό, Σελίδα 113, Άσκηση Β4)

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2+3\lambda x+\lambda+5=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση:

α) έχει ρίζες ίσες **β)** έχει ρίζες άνισες **γ)** είναι αδύνατη.

Άσκηση 4.2.20

Έστω $f(x)=\left(\lambda+2\right)x^2-2\lambda x+3\lambda,\ \lambda\neq -2$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε η $f(x)<0$ να αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Αν $\lambda=-4$ να λυθεί η εξίσωση $|f(x)|=-8x+18$.

Άσκηση 4.2.21 (Σχολικό, Σελίδα 113, Άσκηση Β5)

Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ανίσωση $x^2 + 3\lambda x + \lambda > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 4.2.22

Να βρείτε το $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε η ανίσωση $(\mu+2)x^2 - 2(\mu-2)x + 5(\mu-2) < 0$ να αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 4.2.23

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης , τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει: $0 < d(x_1, x_2) < 2$.

Άσκηση 4.2.24

Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, το τριώνυμο $(\lambda-1)x^2 - 4x + 2\lambda$ διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$;

Άσκηση 4.2.25

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x + \lambda - \lambda^2$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης.

β) Αν $\lambda > \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$,τότε:

i. Να αποδείξετε ότι: $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$

ii. Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$f(x_2),\quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right),\quad f(x_2 + 1)$$

Άσκηση 4.2.26

Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις:

α) $f(x)=\sqrt{3x^2-4x+1}$

β) $f(x)=\sqrt{-4x^2+4x+3}+3\sqrt{-x^2+2x}$

Άσκηση 4.2.27

Δίνεται το τριώνυμο $x^2-(\lambda+4)x+\lambda+6$ με $x\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε το τριώνυμο να έχει πραγματικές ρίζες.

β) Αν $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ οι ρίζες του τριωνύμου, να βρεθεί για ποιες τιμές του λ ισχύει:

i. $x_1{}^2+x_2{}^2<20$ **ii.** $|x_1-x_2|=2$

Άσκηση 4.2.28

Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $-x^2+(2\lambda-1)x+\lambda^2+\lambda+1=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$ να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $x_1{}^2+x_2{}^2+3x_1x_2\geq 0$.